

תרגול 4 יחידות לתלמידי קידום

פרק 57

שאלון 805 בגריות שנת 2020

1	מועד חורף
4	קיץ מועד א
8	קיץ מועד ב

בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

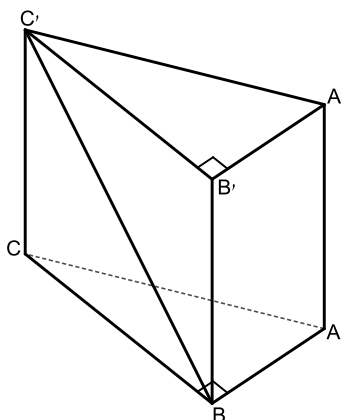
שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(1) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא $\frac{1}{4}$ וסכומה $9\frac{1}{3}$.

- מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 - בין כל שני איברים סמוכים בסדרה הוסיפו איבר חדש כך שהתקבלה סדרה הנדסית אין-סופית חדשה, בכל האיברים בה חיוביים.
 - מהי המנה של הסדרה החדשה? נמק.
 - עבור כל אחת מן הטענות i-ii שלפניך קבע אם היא נכונה או אינה נכונה. נמק את קביעותיך.
 - האיבר החמישי בסדרה החדשה שווה לאיבר העשירי בסדרה הנתונה.
 - סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה החדשה הוא $\frac{1}{2}$.
- מסכום הסדרה הנתונה.

(2) $ABCA'B'C'$ היא מנסרה משולשת ישרה (ראה ציור).

בסיס המנסרה, ABC , הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ($AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$). נתון כי גובה המנסה הוא 8 ואורך היתר של בסיס המנסרה שווה ל- $4\sqrt{2}$.



- מצא את גודל הזווית בין אלכסון הפאה הצדדית $BB'C'C$ ובין בסיס המנסרה.
 - מצא את גודל הזווית $AC'B$.
 - מצא את שטח המשולש $AC'B$.
- הנקודה D היא אמצע הצלע CB.
- חשב את אורך הקטע $A'D$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin 2x$, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = 2\sin x$, המוגדרת גם היא בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון: בתחום הנתון, מלבד הנקודות שמצאת בסעיף ב, גרף הפונקציה $g(x)$

נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום הנתון.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 9 - (\ln x)^2$.

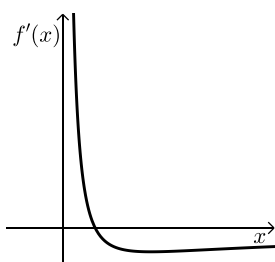
א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



הציור שלפניך מתאר את הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית

הנגזרת, $f'(x)$, על ידי הישר $x = e$ ועל ידי ציר ה- x .

(5) הכמות של חומר רדיואקטיבי דועכת בקצב מעריכי. ביום מסוים נמדדה כמות התחלתית של חומר זה.

שנה לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ק"ג.

5 שנים לאחר יום המדידה הראשון נשארה מן החומר כמות של $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ ק"ג.

א. מצא את קצב הדעיכה של החומר ואת הכמות התחלתית שלו.

נתונה הפונקציה: $g(x) = 3^{-2x}$ המוגדרת לכל $x \geq 0$.

הפונקציה $g(x)$ מתארת את כמות החומר x שנים לאחר יום המדידה הראשון.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

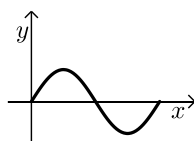
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בעבור $x \geq 0$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 7 ב. 0.5 ג. i. לא. ג. ii. כן.
(2) א. 63.43° ב. 24.09° ג. $8\sqrt{5}$ סמ"ר ד. $\sqrt{84}$ סמ"ר.

- (3) א. (1) $(\pi, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0, 0)$ א. (2) $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $\min\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

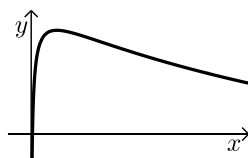
א. (3) להלן סקיצה בצד:



ב. $(0, 0)$, $(\pi, 0)$

ג. 4 יח"ר.

- (4) א. (1) $x > 0$ א. (2) $\left(\frac{1}{e^3}, 0\right)$, $(e^3, 0)$

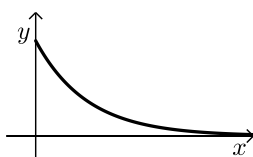


א. (3) $\max(1, 9)$

א. (4) להלן סקיצה בצד:

ב. 1 יח"ר.

- (5) א. $M_0 = 1$, $q = \frac{1}{9}$ ב. $(0, 1)$ ג. ירידה: $x > 0$, אין עלייה.



ד. להלן סקיצה בצד:

בגרות קיץ 2020 מועד א':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(1) נתונים האיברים הכלליים של שתי סדרות: $a_n = -8n + 5$, $b_n = -4n + 3$.

א. מצא את a_1 ואת b_1 .

נתונה סדרה חדשה, c_n , כך ש- $c_n = a_n + b_n$.

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה חשבונית, ומצא את האיבר הראשון שלה, c_1 , ואת ההפרש שלה.

ג. נתון: $a_k = -75$.

חשב את סכום k האיברים הראשונים של הסדרה החדשה, c_n .

(2) SABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABCD, הוא מלבן (ראה ציור).

נתון כי אורך אלכסון הבסיס הוא $4a$ ואורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא $3a$.

$a > 0$ הוא פרמטר.

SO הוא גובה בפירמידה.

א. הבע באמצעות a את אורך הגובה SO.

SE הוא הגובה לצלע BC בפאה SBC.

נתון: $\angle CAB = 60^\circ$.

ב. (1) הבע את אורך הצלע AB באמצעות a .

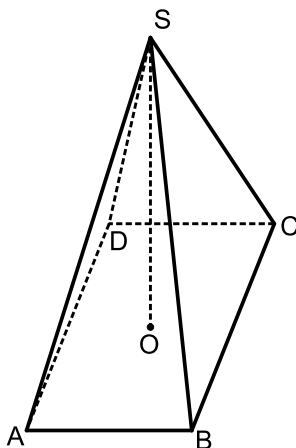
(2) הבע באמצעות a את אורך הגובה SE.

ג. חשב את הזווית שבין הקטע SE ובין בסיס הפירמידה.

SG הוא הגובה לצלע AD בפאה SAD.

נתון כי שטח המשולש SGE הוא $\sqrt{80}$.

ד. מצא את a .



פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($\frac{2}{3}$ נקודות) 66

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום הפנימית שלה.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק שאת משוואתו מצאת ועל ידי ציר ה- y .

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x \cdot \ln x$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = -2f(x)$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ למערכת הצירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מהו המרחק בין נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ובין נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ae^{2x}}{e^x - 1}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

הגרף שלפניך הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \ln 2$.

ב. הסתמך על הגרף, קבע מהו שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \ln 3$ הוא 9.

ג. מצא את a .

הצב $a = 4$ וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. (1) האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות

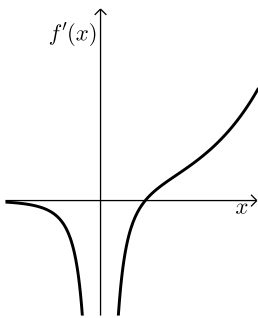
חיתוך עם הצירים? נמק.

(2) מהי משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$

המאונכת לציר ה- x ?

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. בעבור אילו ערכי x גם הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית?

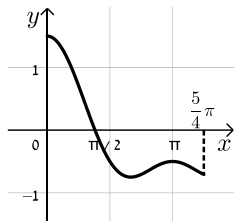


תשובות סופיות:

(1) א. $a_1 = -3, b_1 = -1$ ב. הוכחה. ג. -580.

(2) א. $SO = a\sqrt{5}$ ב. $AB = 2a$ (1) ג. $SE = a\sqrt{6}$ (2) ד. $a = 2$.
ג. $\angle SEO = 65.91^\circ$

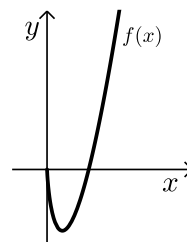
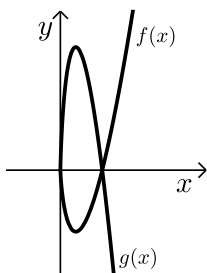
(3) א. $\max\left(\frac{5}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ קצה, $\min\left(\frac{2}{5}\pi, \frac{3}{4}\right)$ קצה, $\max(0, 1.5)$ קצה ב. להלן סקיצה:



ג. $y = -\frac{3}{4}$ (1) ג. $S = 2.22$ (2)

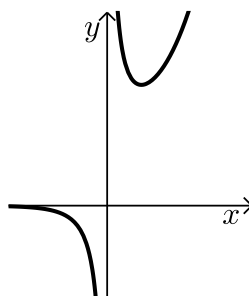
(4) א. $x > 0$ (1) א. $(1, 0)$ (2) א. $\min\left(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e}\right)$ (3) ג. $d = \frac{12}{e} \approx 4.414$

א. (4) להלן סקיצה: ב. להלן סקיצה:



(5) א. $x \neq 0$ ב. $\min, x = \ln 2$ ג. $a = 4$ ד. (1) לא.
ד. (3) סקיצה.

ד. $x = 0$ (2) ה. $x < 0$.



בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על שתי השאלות, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(1) נתונות שתי סדרות חשבוניות:

$$a_n : 3, 10, 17, 24, \dots$$

$$b_n : 17, 38, 59, 80, \dots$$

א. (1) חשב את b_{30} .

(2) עבור איזה ערך של n מתקיים $a_n = b_{30}$? נמק. (n הוא מספר טבעי).

ב. עבור כל אחד משני ההיגדים II-I שלפניך כתוב אם הוא נכון או לא נכון. נמק את קביעותיך.

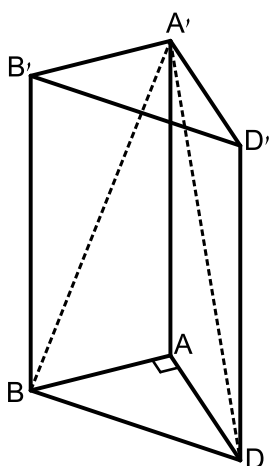
I. לכל n טבעי $3a_n = b_n$.

II. לכל n טבעי $a_{3n} = b_n$.

ג. נתון כי ההפרש בין סכום k האיברים הראשונים בסדרה b_n ובין סכום k

האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 924 (k הוא מספר טבעי).

מצא את k .



(2) נתונה מנסרה משולשת $ABDA'B'D'$ שבסיסה ABD ,

הוא משולש שווה שוקיים וישר זווית ($\angle BAD = 90^\circ$).

אורך השוק של משולש ABD הוא 3.

א. מצא את אורך המקצוע BD .

ב. הסבר מדוע $A'B = A'D$.

נתון: שטח המשולש $BA'D$ הוא $15\sqrt{2}$.

ג. מצא את גודל הזווית שבין הגובה לבסיס המשולש $BA'D$

ובין בסיס המנסרה, ABD .

ד. חשב את נפח המנסרה $ABDA'B'D'$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin(2x) + 4$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, עם הצירים?
- ד. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.
- ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = \pi$.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{a-x}$, a הוא פרמטר.

- א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- נתון: לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 1.
- ב. מצא את a , וקבע אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון נוספות.
- הצב: $a = \frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענה על סעיפים ג-ד.
- ג. (1) כתוב את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$, המאונכת לציר ה- x .
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = -2f(x)$.
- מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 \cdot \ln(x^2 - 2x + 1)$.

א. הראה כי תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq 1$.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$, המאונכת לציר ה- x .

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ הוא $x \neq 1$. $g'(x) = f(x)$ בכל תחום ההגדרה.

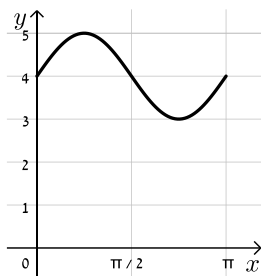
ה. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

תשובות סופיות:

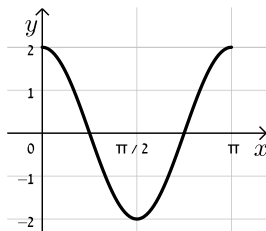
(1) א. $b_{30} = 626$ א. (2) $n = 90$ ב. I לא נכון. II נכון. ג. $k = 11$.

(2) א. $BD = 3\sqrt{2}$ ב. הסבר. ג. $\angle AEA = 77.75^\circ$ ד. 43.976 יח"נ.

(3) א. $\max(\pi, 4)$ קצה, $\min\left(\frac{3}{4}\pi, 3\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 5\right)$, $\min(0, 4)$ קצה ב. להלן סקיצה:



ד. להלן סקיצה:



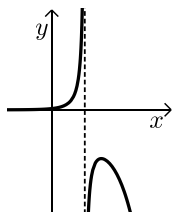
ג. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $(0, 2)$

ה. $S = 4\pi$.

(4) א. $x \neq a$ ב. $a = 1$, $\max(1, -2e^2)$ ג. (1) $x = \frac{1}{2}$

ג. (2) $(0, 2)$ ג. (3) עולה: $\frac{1}{2} < x < 1$, $x < \frac{1}{2}$, יורדת: $x > 1$.

ג. (4) סקיצה בצד. ד. $\min(1, 4e^2)$.



(5) א. (1) הוכחה. א. (2) $x = 1$ ב. עולה: $x > 1$, יורדת: $x < 1$.

ג. $(0, 0)$, $(2, 0)$ ד. סקיצה בצד.

ה. $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 0$.

